На правах рукописи

АЛЕКСЕЕНКОВ ВЛАДИМИР ВИТАЛЬЕВИЧ

ТРЁХЭЛЕМЕНТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

01.01.01 – Математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа Смоленского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор РАСУЛОВ Карим Магомедович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор АКСЕНТЬЕВ Леонид Александрович

доктор физико-математических наук, доцент АДУКОВ Виктор Михайлович

Ведущая организация: Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

Защита состоится 4 февраля 2009 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, д. 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «___» декабря 2008 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современной теории функций комплексного переменного одной из важнейших областей исследований является теория краевых (граничных) задач в классах аналитических функций и их различных обобщений.

В настоящее время теория краевых (граничных) задач в классах аналитических функций, благодаря фундаментальным работам Л.А. Аксентьева, Б.В. Боярского, И.Н. Векуа, Н.П. Векуа, Ф.Д. Гахова, Э.И. Зверовича, Р.С. Исаханова, Д.А. Квеселава, Г.Ф. Манджавидзе, Л.Г. Михайлова, Г.С. Михлина, Н.И. Мусхелишвили, Л.И. Чибриковой и многих других известных математиков, приняла уже завершенный вид.

Однако, для решения некоторых прикладных задач, сводящихся к уже хорошо исследованным краевым задачам, классической теории последних оказывается недостаточно. Поэтому при постановке задач возникает необходимость в расширении классических предположений о классах заданных и искомых функций, о классах рассматриваемых контуров и о других параметрах задачи. Исследования ведутся в различных направлениях: обобщаются полученные ранее результаты для более широкого класса контуров, рассматриваются различные задачи, содержащие граничные значения функции, комплексно сопряжённой с искомой, граничные задачи в классах различных обобщений аналитических функций и т.д.

Так, например, в последнее время, как в России, так и за ее пределами (Беларусь, Германия, Китай, КНДР, Украина, Черногория и др.) наблюдается интерес к краевым задачам в классах функций, являющихся различными обобщениями класса аналитических функций комплексного переменного (например, полианалитических, метааналитических, регулярных решений так называемого уравнения Бауэра-Пешля и т.д.). В частности, это явление обусловлено тем, что, как было обнаружено Г.В. Колосовым, эффективным средством для решения задач плоской теории упругости могут служить так называемые бианалитические функции. Кроме того, теория краевых задач для различных обобщений аналитических функций тесно связана с теорией дифференциальных уравнений, теорией бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны и другими разделами современной математики и механики.

Большой вклад в развитие указанного направления внесли В.М. Адуков, И.А. Бикчантаев, А.В. Бицадзе, В.А. Габринович, М.П. Ганин, Ф.Д. Гахов, В.И. Жегалов, К.М. Расулов, В.С. Рогожин, Р.С. Сакс, И.А. Соколов, M. Canak, B. Damjanovich, C.R. Shoe и др.

Представленная работа относится к этому направлению развития математического анализа. Она посвящена исследованию *трёхэлементных* линейных краевых задач типа Римана в классах кусочно метааналитических функций в круге, т.е. в классах функций, являющихся решениями дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \overline{z}^2} + a_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \overline{z}} + a_0 F(z) = 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1 – некоторые комплексные числа.

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Обозначим границу круга T^+ через L, а область, дополняющую замкнутый круг $T^+ \cup L$ до расширенной комплексной плоскости – через T^-.

Задача $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$.

Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ *класса* $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на* $L = \{t : |t| = 1\}$ *граничным условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} = G_{11}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + G_{12}(t) \overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}} + g_1(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} = G_{21}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + G_{22}(t) \overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}} + g_2(t), \tag{3}$$

где $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $\left(k = 1, 2;\ j = 1, 2\right)$ *– заданные на* L *функции, удовлетворяющие условию* $H(L)$ *(Гёльдера), причем* $G_{k1}(t) \neq 0$ *на* L.

Задача $\boldsymbol{GR}_{2,\mathrm{M}}$.

Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ *класса* $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на* L *граничным условиям:*

$$F^+(t) = G_{11}(t) F^-(t) + G_{12}(t) \overline{F^-(t)} + g_1(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = G_{21}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + G_{22}(t) \overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-}} + g_2(t), \tag{5}$$

где $\partial/\partial n_+$ $(\partial/\partial n_-)$ *– производная по внутренней (внешней) нормали к* L, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $\left(k = 1, 2;\ j = 1, 2\right)$ *– заданные на* L *функции, удовлетворяющие условию* $H(L)$ *(Гёльдера), причем* $G_{k1}(t) \neq 0$ *на* L.

Прежде всего заметим, что при условии $G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$ задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ впервые были поставлены Ф.Д. Гаховым в классе полианалитических функций как некоторые естественные обобщения краевой задачи Римана для аналитических функций[1].

В случае $G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$ и когда $L = \{z : |z| = 1\}$ задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ были решены И.А. Соколовым в 60-х годах прошлого века при помощи хорошо известного в математической физике метода решения краевых задач в областях с аналитическими границами. Позднее К.М. Расулову совершенно иным методом удалось решить задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ (при $G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$) в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами как в классах бианалитических (полианалитических) функций, так и в классах метааналитических функций и некоторых их обобщений.

Впервые краевые задачи вида $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ в классах кусочно полианалитических функций (без дополнительного условия $G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$) были сформулированы К.М. Расуловым[2] в качестве естественных и важных обобщений основных (двухэлементных) краевых задач типа Римана для полианалитических функций.

В работах Н.Г. Анищенковой задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ были исследованы в классах кусочно бианалитических функций. Но поскольку многие качественные свойства метааналитических функций существенно отличаются от свойств бианалитических функций, то при исследовании краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ в классах кусочно метааналитических функций возникает необходимость в использовании совершенно новых подходов и дополнительных математических средств (в частности, аналитической теории дифференциальных уравнений). Поэтому, разработка методов решения задач $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ в классах метааналитических функций является актуальной проблемой.

Целью работы является развитие общих методов решения краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,\text{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\text{M}}$ в классах кусочно метааналитических функций, построение картин их разрешимости и выявление их частных случаев, допускающих решения в замкнутой форме (в интегралах типа Коши).

Методика исследования. В работе использованы методы теории функций комплексного переменного, теория интегральных уравнений (сингуляр-

[1] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М: Наука, 1977. – 640 с.
[2] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

ных и типа Фредгольма второго рода), аналитическая теория дифференциальных уравнений. Кроме того, существенным образом задействована теория скалярных и матричных краевых задач Римана в классах аналитических функций.

Научная новизна. В диссертации впервые разработаны методы решения трёхэлементных краевых задач типа Римана в классах метааналитических функций в круге, исследованы картины их разрешимости и установлены условия их нётеровости. Выделены частные случаи, когда рассматриваемые задачи допускают решение в замкнутой форме (в интегралах типа Коши).

Важно отметить, что предложенные в работе методы исследования и полученные результаты могут быть применены и при решении многоэлементных краевых задач в классах метааналитических функций, отличных от изученных (например, краевых задач со сдвигом, четырехэлементных краевых задач и т.д.).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Методы решения первой и второй основных трёхэлементных краевых задач типа Римана в классах кусочно метааналитических функций в случае, когда линией скачков является окружность.
2. Необходимые и достаточные условия разрешимости указанных задач и установление их нётеровости.
3. Определение частных случаев, когда трёхэлементные краевые задачи типа Римана в классах кусочно метааналитических функций в круге допускают решения в замкнутой форме (в интегралах типа Коши).

Практическая значимость результатов. Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в научных коллективах, занимающихся исследованием краевых задач в классах аналитических функций комплексного переменного и их обобщений, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов Смоленского, Казанского, Белорусского, Новосибирского и др. университетов.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 87 наименований. Нумерация формул сквозная в каждой главе. Например, (1.2) (или теорема 1.2) означает вторую формулу (теорему) в первой главе. Общий объем работы составляет 116 страниц.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 11 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из них 3 работы выполнены совместно с научным руководителем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Восьмой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2007 г.), на научно-практической конференции «Математика. Физика. Методика преподавания» (Смоленск, 2007 г.), на 8-й и 9-й международных конференциях «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2007-2008 г.г.), на 14-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2008 г.)., на 5-й Межрегиональной научно-технической конференции студентов и аспирантов (Смоленск, 2008 г.), а также неоднократно на научно-исследовательском семинаре «Краевые задачи комплексного анализа и их приложения» в Смоленском государственном университете (руководитель – профессор К.М. Расулов, Смоленск, 2005-2008 г.г.).

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность выбранной темы и кратко изложено основное содержание диссертационной работы.

Первая глава «Вспомогательные сведения и обзор литературы» состоит из трех разделов. В разделе 1.1 вводятся наиболее часто используемые определения и понятия. Основными из них являются понятие кусочно метааналитической функции и класса $M_2(T^{\pm}) \cap H^{(1)}(L)$, в котором ищутся решения поставленных задач.

В разделе 1.2 излагается один из методов конструктивного решения вспомогательной обобщенной краевой задачи Римана с интегральными членами в классах исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций, состоящей в отыскании всех кусочно аналитических функций $\{\varphi^{+}(z);\varphi^{-}(z)\}$ с линией скачков $L=\{t:|t|=1\}$, непрерывно (в смысле Гёльдера) продолжаемых на L, граничные значения которых удовлетворяют краевому условию

$$\varphi^{+}(t)+\int_L A(t,\tau)\varphi^{+}(\tau)d\tau+\int_L B(t,\tau)\overline{\varphi^{+}(\tau)}d\tau=G_1(t)\varphi^{-}(t)+G_2(t)\overline{\varphi^{-}(t)}+$$

$$+\int_L D(t,\tau)\varphi^{-}(\tau)d\tau+\int_L E(t,\tau)\overline{\varphi^{-}(\tau)}d\tau+Q(t),\quad t\in L, \qquad (6)$$

где $G_1(t)$, $G_2(t)$, $Q(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$, причем $G_1(t)\neq 0$ на L; $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)$, $D(t,\tau)$, $E(t,\tau)$ – заданные на $L\times L$ фредгольмовы ядра.

Указанная задача играет важную роль при исследовании трёхэлементных краевых задач типа Римана в классах метааналитических функций второго типа в случае круговой области, которые рассмотрены в третьей главе настоящей диссертации.

Раздел 1.3 посвящен краткому обзору литературы по краевым задачам в классах полианалитических и метааналитических функций.

Вторая глава «Основные трёхэлементные краевые задачи типа Римана в классах метааналитических функций первого типа в круговой области» посвящена исследованию первой и второй основных трёхэлементных краевых задач типа Римана в классах кусочно метааналитических функций *первого типа* с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, т.е. функций вида

$$F(z) = \begin{cases} [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda \cdot \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\{\lambda \cdot \bar{z} / z^m\}, & z \in T^-, \end{cases} \qquad (7)$$

где λ – единственный (двукратный) корень характеристического уравнения дифференциального уравнения (1); $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ ($\varphi_0^-(z)$, $\varphi_1^-(z)$) – произвольные аналитические в T^+ (T^-) функции; m – фиксированное натуральное число, $m \geq 2$.

Данная глава состоит из четырех разделов.

В разделе 2.1 дается точная постановка первой и второй основных трёхэлементных краевых задач типа Римана в классах метааналитических функций, которые в дальнейшем, ради краткости, будем называть задачами $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,\mathrm{M}}$ соответственно. Здесь также устанавливается, что так как граничные свойства метааналитических функций первого и второго типа существенно отличаются, то методы и результаты исследования краевых задач в классах метааналитических функций первого и второго типа также существенно разнятся друг от друга.

Раздел 2.2 посвящен решению и исследованию картины разрешимости первой основной трёхэлементной краевой задачи типа Римана в классах метааналитических функций первого типа в круговой области.

С учетом представления (7), а также того, что на окружности L имеет место тождество $\bar{t} = 1/t$, рассматриваемая задача сводится к решению двух обобщенных краевых задач Римана с сопряжением вида

$$\Phi_k^+(t) = \widetilde{G}_{k1}(t)\Phi_k^-(t) + \widetilde{G}_{k2}(t)\overline{\Phi_k^-(t)} + \widetilde{g}_k(t), \quad k = 1, 2, \qquad (8)$$

где $\widetilde{G}_{k1}(t) = G_{k1}(t)\exp\{\lambda / t^{m+1} - \lambda / t\}$, $\widetilde{G}_{k2}(t) = t^2 G_{k2}(t)\exp\{\overline{\lambda} t^{m+1} - \lambda / t\}$, $\widetilde{g}_k(t) = t g_k(t)\exp\{-\lambda / t\}$, а функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k = 1, 2$) – аналитические в областях T^+ и T^- соответственно, связанные с аналитическими компонентами искомой кусочно метааналитической функции по следующим формулам:

$$\Phi_k^+(z) = z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + (-1)^{k-1}\left[\lambda z\varphi_0^+(z) + \left(\lambda + z\right)\varphi_1^+(z)\right], \qquad (9а)$$

$$\Phi_k^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + (-1)^{k-1}\left[\frac{\lambda(z^2 + (-1)^k m)}{z^{m+1}}\varphi_0^-(z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda(z^2 + (-1)^k m)}{z^{m+2}} + z\right)\varphi_1^-(z)\right]. \qquad (9б)$$

Таким образом, решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ по сути сводится к решению двух обобщенных краевых задач Римана с сопряжением (8) (при значениях параметра $k = 1, 2$) в классах исчезающих на бесконечности аналитических функций с линией скачков L. Относительно задач вида (8) доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Если* $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \equiv \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t \in L$, *то решение обобщенной краевой задачи Римана с сопряжением вида* (8) (*при фиксированном значении параметра* k) *сводится к последовательному решению двух обычных скалярных краевых задач типа Римана в классах кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности:*

$$\Phi_k^+(t) = A_{k1}(t)\widetilde{\Phi}_k^-(t) + B_{k1}(t), \qquad (10а)$$

$$\widetilde{\Phi}_k^+(t) = A_{k2}(t)\Phi_k^-(t) + B_{k2}(t), \qquad (10б)$$

где

$$A_{k1}(t) = \frac{t\widetilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}}, \quad B_{k1}(t) = \frac{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}\widetilde{g}_k(t) - \widetilde{G}_{k2}(t)\overline{\widetilde{g}_k(t)}}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$A_{k2}(t) = -\frac{\overline{t\widetilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}}, \quad B_{k2}(t) = \frac{1}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}}\psi_{k2}^-(t) - \frac{\overline{t \cdot \widetilde{g}_k(t)}}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}}.$$

Если же выполняется условие $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \neq \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t \in L$, *то решение задачи* (8) *сводится к последовательному решению обобщенной и обычной скалярных задач Римана в классах кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности:*

$$\widetilde{\Phi}_k^+(t) - \frac{\widetilde{G}_{k1}(t)}{\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right|^2 - \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|^2}\widetilde{\Phi}_k^-(t) + \int_L \widetilde{B}_k(t,\tau)\widetilde{\Phi}_k^-(\tau)d\tau = Q_{k2}(t), \qquad (10в)$$

$$\Phi_k^+(t) = \frac{\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right|^2 - \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|^2}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}} \Phi_k^-(t) + \frac{t\widetilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}} \widetilde{\Phi}_k^-(t) + \frac{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}\widetilde{g}_k(t) - \widetilde{G}_{k2}(t)\overline{\widetilde{g}_k(t)}}{\overline{\widetilde{G}_{k1}(t)}}, \quad (10г)$$

где функции $\widetilde{B}_k(t,\tau), Q_{k2}(t)$ *определенным образом выражаются через коэффициенты* $\widetilde{G}_{k1}(t)$, $\widetilde{G}_{k2}(t)$, $\widetilde{g}_k(t)$.

Итак, решая задачи вида (8) (при фиксированном значении параметра $k=1,2$), находим (в случае их разрешимости) функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$.

Далее, отдельно рассматриваем 2 случая: 1) $\lambda = 0$ и 2) $\lambda \neq 0$. В каждом из них показываем, как по найденным функциям $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ из формул (9а)-(9б) можно определить аналитические компоненты искомой кусочно метааналитической функции. В первом случае получен следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $L=\{t:|t|=1\}$ *и характеристическое уравнение дифференциального уравнения* (1) *имеет один* (*двукратный*) *корень* $\lambda = 0$. *Тогда:*

если $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \equiv \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$ *на* L ($k=1,2$), *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *сводится к решению в классах кусочно аналитических функций четырех обычных скалярных задач Римана вида* (10а)-(10б);

если же $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \neq \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$ *на* L ($k=1,2$), *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *сводится к решению в классах кусочно аналитических функций двух обобщенных скалярных задач Римана вида* (10в) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (10г).

При этом задача $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные скалярные задачи Римана для кусочно аналитических функций и выполняются условия*

$$\Phi_1^+(0) = \Phi_2^+(0) = \frac{d\varphi_1^+(0)}{dz}.$$

Во втором случае ($\lambda \neq 0$) установлен результат.

Теорема 2.2. *Пусть* $L=\{t:|t|=1\}$ *и характеристическое уравнение дифференциального уравнения* (1) *имеет один* (*двукратный*) *корень* $\lambda \neq 0$. *Тогда:*

если $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \equiv \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$ *на* L ($k=1,2$), *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *сводится к решению в классах кусочно аналитических функций четырех обычных скалярных задач Римана вида* (10а)-(10б);

если же $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \neq \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$ *на* L ($k=1,2$), *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *сводится к решению в классах кусочно аналитических функций двух обобщенных ска-*

лярных задач Римана вида (10в) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (10г).

Кроме того, задача $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные задачи Римана для аналитических функций и дифференциальное уравнение*

$$\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \frac{\lambda}{z^2}\varphi_1^+(z) = \frac{1}{z^2} f(z),$$

где $\varphi_1^+(z)$ *– искомая аналитическая в круге* T^+ *функция,* $f(z)$ *– вполне определенная аналитическая в круге* T^+ *функция.*

При этом в работе получены некоторые необходимые и достаточные условия разрешимости указанного дифференциального уравнения.

Далее на основе теорем 2.1 и 2.2 и приведенных выше рассуждений проводятся исследования картины разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ в классах метааналитических функций первого типа, которые подытоживают следующие теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть* $L = \{t : |t| = 1\}$, $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \equiv \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t \in L$ $k = 1,2$ *и характеристическое уравнение дифференциального уравнения* (1) *имеет один* (*двукратный*) *корень* λ. *Тогда числа* l *линейно независимых решений однородной задачи* $\boldsymbol{GR}^0_{1,\mathrm{M}}$ *и* p *условий разрешимости неоднородной задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *конечны, т.е. задача* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *является нётеровой.*

Теорема 2.4. *Пусть* $L = \{t : |t| = 1\}$, $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \neq \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t \in L$, $k = 1,2$ *и характеристическое уравнение дифференциального уравнения* (1) *имеет один* (*двукратный*) *корень* λ. *Тогда числа* l *линейно независимых решений однородной задачи* $\boldsymbol{GR}^0_{1,\mathrm{M}}$ *и* p *условий разрешимости неоднородной задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *конечны, т.е. задача* $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ *является нётеровой.*

В разделе 2.3 устанавливается, что если $L = \{t : |t| = 1\}$ и функции $\widetilde{G}_{k1}(t)$ и $\widetilde{G}_{k2}(t)$, $k = 1,2$, являются рациональными и $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right| \neq \left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t \in L$, то задача $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ в круге допускает решение в замкнутой форме.

В заключение раздела 2.3 предложенный метод решения задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ иллюстрируется на конкретном примере.

Раздел 2.4 посвящен решению и исследованию картины разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{2,\text{М}}$ в классах метааналитических функций первого типа. Основная цель этого раздела – показать, что разработанные в разделе 2.2 методы исследования задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{М}}$ могут быть использованы и при исследовании других краевых задач для метааналитических функций первого типа, в частности, задачи $\boldsymbol{GR}_{2,\text{М}}$.

В **третьей главе** «Основные трёхэлементные краевые задачи типа Римана в классах метааналитических функций второго типа в круговой области» исследуются первая и вторая основные краевые задачи типа Римана в классах кусочно метааналитических функций *второго типа* с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, т.е. функций вида

$$F(z) = \begin{cases} \varphi_0^+(z)\exp\{\lambda_0 \cdot \bar{z}\} + \varphi_1^+(z)\exp\{\lambda_1 \cdot \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ \varphi_0^-(z)\exp\{\lambda_0 \cdot \bar{z}/z^m\} + \varphi_1^-(z)\exp\{\lambda_1 \cdot \bar{z}/z^m\}, & z \in T^-; \end{cases} \tag{11}$$

где λ_0 и λ_1 – различные корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (1); $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ $(\varphi_0^-(z),\ \varphi_1^-(z))$ – произвольные аналитические в T^+ (T^-) функции; m – фиксированное натуральное число, $m \geq 2$.

В разделе 3.1 разработан конструктивный метод решения задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{М}}$ в классах метааналитических функций второго типа в круговой области. Суть его в следующем.

Используя представления (11) для искомой кусочно метааналитической функции второго типа, представим граничное условие (2) в виде

$$\Phi_0^+(t) = \widetilde{G}_{11}(t) \cdot \Phi_0^-(t) + \widetilde{G}_{12}(t) \cdot \overline{\Phi_0^-(t)} + Q_1(t), \tag{12}$$

где

$$\Phi_k^+(z) = \frac{d\varphi_k^+(z)}{dz} + \lambda_k \varphi_k^+(z), \quad \Phi_k^-(z) = z\frac{d\varphi_k^-(z)}{dz} - \left(\frac{m}{z^{m+1}} - \frac{1}{z^{m-1}}\right) \cdot \lambda_k \varphi_k^-(z), \tag{13}$$

$$k = 0, 1,$$

$$Q_1(t) = -\exp\{(\lambda_1 - \lambda_0)/t\} \cdot \Phi_1^+(t) + \frac{1}{t} G_{11}(t)\exp\{\lambda_1/t^{m+1} - \lambda_0/t\} \cdot \Phi_1^-(t) +$$

$$+ tG_{12}(t)\exp\{\overline{\lambda_1} \cdot t^{m+1} - \lambda_0/t\} \cdot \overline{\Phi_1^-(t)} + g_1(t)\exp\{-\lambda_0/t\}.$$

Временно считая функцию $Q_1(t)$ известной, равенство (12) можно рассматривать как краевое условие обобщенной краевой задачи Римана с сопряжением относительно аналитических функций $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$. Решая задачу (12), например, методом, предложенным в доказательстве леммы 2.1, найдем (в случае ее разрешимости) выражения граничных значений аналитических функций $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$ через граничные значения временно неизвестных функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$:

$$\Phi_0^+(t) = -\exp\{\lambda_1/t - \lambda_0/t\}\Phi_1^+(t) + \int_L A^+(t,\tau)\Phi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B^+(t,\tau)\overline{\Phi_1^+(\tau)}d\tau +$$

$$+ \int_L D^+(t,\tau)\Phi_1^-(\tau)d\tau + \int_L E^+(t,\tau)\overline{\Phi_1^-(\tau)}d\tau + g^+(t), \qquad (14а)$$

и

$$\Phi_0^-(t) = -\exp\{(\lambda_1 - \lambda_0)/t^{m+1}\}\Phi_1^-(t) + \int_L A^-(t,\tau)\Phi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B^-(t,\tau)\overline{\Phi_1^+(\tau)}d\tau +$$

$$+ \int_L D^-(t,\tau)\Phi_1^-(\tau)d\tau + \int_L E^-(t,\tau)\overline{\Phi_1^-(\tau)}d\tau + g^-(t), \qquad (14б)$$

где функции $A^\pm(t,\tau)$, $B^\pm(t,\tau)$, $D^-(t,\tau)$, $E^-(t,\tau) \in H_*^{(2)}(L\times L)$, а $g^\pm(t) \in H^{(1)}(L)$.

Далее, на основании формул (13), из соотношений (14а) и (14б) получаем выражение граничных значений аналитических компонент $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0^-(z)$ искомой кусочно метааналитической функции через граничные значения временно неизвестных компонент $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$.

Принимая во внимание указанные выражения, граничное условие (3) (с учетом представлений (11)) можно записать в виде

$$\varphi_1^+(t) + \int_L A(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B(t,\tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau =$$

$$= \widetilde{G}_{21}(t)\varphi_1^-(t) + \widetilde{G}_{22}(t)\overline{\varphi_1^-(t)} + \int_L D(t,\tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau + \int_L E(t,\tau)\overline{\varphi_1^-(\tau)}d\tau + Q(t), \quad (15)$$

где при условиях $G_{k1}(t)$, $G_{k2}(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(1)}(L)$ функции $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)$, $D(t,\tau)$, $E(t,\tau) \in H_*^{(1)}(L\times L)$, а $\widetilde{G}_{21}(t)$, $\widetilde{G}_{22}(t)$ и $Q(t) \in H^{(1)}(L)$.

Равенство (15) есть граничное условие обобщенной краевой задачи Римана относительно кусочно аналитической функции $\{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$, исчезающей на бесконечности, которая подробно исследована в разделе 1.2 первой главы настоящей диссертации.

Решая задачу (15) (в случае ее разрешимости) определим аналитические компоненты $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ искомой кусочно метааналитической функции $F(z)$. После этого, подставляя найденные аналитические функции $\varphi_1^+(z)$ и

$\varphi_1^-(z)$ в правые части равенств (13), найдем функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$. Далее, подставив в свободный член краевого условия (12) граничные значения $\Phi_1^+(t)$ и $\Phi_1^-(t)$ функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$, а затем решив обобщенную краевую задачу Римана (12), определим функции $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$, а следовательно и аналитические компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0^-(z)$ искомой кусочно метааналитической функции $F(z)$.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.1. *Если* $L=\{t:|t|=1\}$, *а функции* $G_{k1}(t)$, $G_{k2}(t)\in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t)\in H^{(1)}(L)$ $(k=1,2)$, *и характеристическое уравнение дифференциального уравнения* (1) *имеет два различных корня, то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *сводится к последовательному решению обобщенной краевой задачи Римана с интегральными членами* (15) *и обобщенной краевой задачи Римана* (11) *в классах кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности.*

В разделе 3.2 на основе результатов, полученных в разделе 3.1, проводится исследование картины разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\mathrm{M}}$ в классах метааналитических функций второго типа. При этом оказывается целесообразным рассмотрение двух случаев: 1) $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right|\equiv\left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t\in L$; 2) $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right|\neq\left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t\in L$ $(k=1,2)$.

Подытоживает все рассуждения этого раздела следующая теорема.

Теорема 3.2. *Если* $L=\{t:|t|=1\}$ *и выполняются условия* $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right|\equiv\left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t\in L$, *или* $\left|\widetilde{G}_{k1}(t)\right|\neq\left|\widetilde{G}_{k2}(t)\right|$, $t\in L$, $k=1,2$, *то задача* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *является нётеровой.*

В разделе 3.3 установлено следующее утверждение.

Теорема 3.3. *При выполнении условий*

$$G_{11}(t)\equiv G_{21}(t)\equiv G_1(t) \text{ и } G_{21}(t)\equiv G_{22}(t)\equiv G_2(t),\quad t\in L,$$

решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *для кусочно метааналитических функций вида*

$$F(z)=\begin{cases}\varphi_0^+(z)\exp\{\lambda\cdot\bar{z}\}+\varphi_1^+(z), & z\in T^+,\\ \varphi_0^-(z)\exp\{\lambda\cdot\bar{z}/z^m\}+\varphi_1^-(z), & z\in T^-,\end{cases}$$

исчезающих на бесконечности, сводится к последовательному решению двух обобщенных скалярных краевых задач Римана с сопряжением в классах кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности.

Таким образом, в этом случае решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{М}}$ в классах метааналитических функций второго типа упрощается, т.е. задача $\boldsymbol{GR}_{1,\text{М}}$ допускает эффективное решение.

Полученные в разделе 3.3 результаты проиллюстрированы на конкретном примере.

Раздел 3.4 посвящен решению и исследованию картины разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{2,\text{М}}$ в классах кусочно метааналитических функций второго типа. Показано, что, используя логическую схему метода решения задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\text{М}}$, разработанного в разделе 3.1, можно исследовать и задачу $\boldsymbol{GR}_{2,\text{М}}$.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору К.М. Расулову за постановку задач и внимание, оказанное при работе над диссертационным исследованием.

Список работ автора по теме диссертации

1. Алексеенков В.В. Трехэлементная задача типа Римана для бианалитических функций в случае полуплоскости / В.В. Алексеенков, К.М. Расулов // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвуз. сб. науч. тр. / Смоленский гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2005. – Вып. 6. – С. 3-9. (0,43/0,27 п.л.)

2. Алексеенков В.В. О решении трехэлементной краевой задачи типа Газемана для бианалитических функций в односвязной области / В.В. Алексеенков // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвуз. сб. науч. тр. / Смоленский гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2006. – Вып. 7. – С. 3-15. (0,87 п.л.)

3. Алексеенков В.В. Об одном методе решения второй трехэлементной краевой задачи типа Газемана для бианалитических функций / В.В. Алексеенков // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции (14-16 мая 2007 г.) / Смоленский гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2007. – Вып. 8. – С. 130-135. (0,4 п.л.)

4. Алексеенков В.В. Об одном частном случае трехэлементной краевой задачи Газемана для уравнения второго порядка, порожденного оператором Коши-Римана, допускающем эффективное решение / В.В. Алексеенков // Математика. Физика. Методика преподавания: материалы науч.-практ. конф. (23-24 мая 2007 г.) / Военная академия ПВО ВС РФ им. маршала Советского Союза А.М. Василевского. – Смоленск: Изд-во Военной академии, 2008. – С. 4-7. (0,24 п.л.)

5. Алексеенков В.В. О решении трехэлементной краевой задачи типа Газемана для некоторых обобщений бианалитических функций / В.В. Алексеенков // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского / Казан. матем. общество, Казан. гос. ун-т. – Казань: Изд-во Казан. матем. общества. – 2007. – Т. 35: Теория функций, её приложения и смежные вопросы: материалы Восьмой международной Казан. летней научной школы-конференции (27 июня – 4 июля 2007 г.). – С. 20-22. (0,06 п.л.)

6. Алексеенков В.В. Обобщенная краевая задача типа Римана в классе метааналитических функций в круге / В.В. Алексеенков // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвуз. сб. науч. тр. / Смоленский гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2007. – Вып. 8. – С. 3-15. (0,87 п.л.)

7. Алексеенков В.В. Обобщенная краевая задача типа Римана для одного класса метааналитических функций в полувырожденном случае / В.В. Алексеенков // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. 14-й Сарат. зимней школы, посвящ. памяти акад. П.Л. Ульянова. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – С. 9-10. (0,06 п.л.)

8. Алексеенков В.В. Трехэлементная краевая задача типа Римана для метааналитических функций в круге / В.В. Алексеенков, К.М. Расулов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8, Вып. 1. – С. 3-9. (0,62/0,48 п.л.)

9. Алексеенков В.В. О решении второй основной обобщенной краевой задачи типа Римана для одного класса метааналитических функций в круге / В.В. Алексеенков // Информационные технологии, энергетика и экономика: сб. трудов V Межрегиональной науч.-техн. конф. студ. и асп. (10-11 апреля 2008 г.). В 3 т. Т. 1. / Филиал МЭИ (ТУ) в г. Смоленске. – 2008. – С. 116-118. (0,2 п.л.)

10. Алексеенков В.В. Вторая основная обобщенная краевая задача типа Римана для метааналитических функций в круге / В.В. Алексеенков // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной

конференции (19-21 мая 2008 г.) / Смоленский гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2008. – Вып. 9. – С. 123-129. (0,47 п.л.)

11. Алексеенков В.В. О решении трехэлементной краевой задачи типа Газемана для метааналитических функций в круге / В.В. Алексеенков, К.М. Расулов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – Гродно, 2008. – № 2 (68). – С. 10-16. (0,52/0,44 п.л.)